

指对运算选择

一、单选题

1. 已知 $\log_2(x-1) + \log_4(x-1) = \frac{3}{4}$, 则 $x =$ ()

A. $2\sqrt{2}+1$

B. $\sqrt[4]{2}+1$

C. $\sqrt[3]{2}+1$

D. $\sqrt{2}+1$

【答案】D

【详解】由 $x-1 > 0$ 得 $x > 1$. 因为

$$\log_2(x-1) + \log_4(x-1) = \log_2(x-1) + \frac{1}{2}\log_2(x-1) = \frac{3}{2}\log_2(x-1) = \frac{3}{4},$$

$$\text{所以 } \log_2(x-1) = \frac{1}{2},$$

$$\text{得 } x = \sqrt{2} + 1.$$

2. 已知非零实数 x, y 满足 $2^x = 3^y$, 则下列各式中为定值的是 ()

A. $x-y$

B. $3x-2y$

C. $\frac{x}{y}$

D. $\frac{x^3}{y^2}$

【答案】C

【详解】令 $2^x = 3^y = k, k > 0$ 且 $k \neq 1$, 则 $x = \log_2 k, y = \log_3 k$,

$$\text{所以 } x-y = \log_2 k - \log_3 k = \frac{\ln k}{\ln 2} - \frac{\ln k}{\ln 3}, \text{ 当 } k \text{ 的值变化时, } \ln k \text{ 不确定,}$$

则 $x-y$ 的值不为定值;

$$3x-2y = 3\log_2 k - 2\log_3 k = \frac{3\ln k}{\ln 2} - \frac{2\ln k}{\ln 3}, \text{ 当 } k \text{ 的值变化时, } \ln k \text{ 不确定,}$$

则 $3x-2y$ 的值不为定值;

$$\frac{x}{y} = \frac{\log_2 k}{\log_3 k} = \frac{\frac{\ln k}{\ln 2}}{\frac{\ln k}{\ln 3}} = \frac{\ln 3}{\ln 2} = \log_2 3, \text{ 为定值;}$$

$$\frac{x^3}{y^2} = \frac{(\log_2 k)^3}{(\log_3 k)^2} = \frac{\left(\frac{\ln k}{\ln 2}\right)^3}{\left(\frac{\ln k}{\ln 3}\right)^2} = \frac{(\ln 3)^2}{(\ln 2)^3} \cdot \ln k, \text{ 当 } k \text{ 的值变化时, } \ln k \text{ 不确定,}$$

则 $\frac{x^3}{y^2}$ 的值不为定值.

3. 若 $e^a = 2, e^b = 50$, 则 ()

A. $a+b=100$

B. $b-a=25$

C. $ab=2\ln 5$

D. $\frac{b}{a} > 5$

【答案】 D**【分析】** 先应用指数和对数转化，再应用对数运算律计算判断各个选项.**【详解】** 因为 $e^a = 2$, $e^b = 50$, 所以 $a = \ln 2$, $b = \ln 50$,所以 $a+b = \ln 2 + \ln 50 = \ln 100$, A 选项错误; $b-a = \ln 50 - \ln 2 = \ln 25$, B 选项错误; $ab = \ln 2 \cdot \ln 50$, C 选项错误; $\frac{b}{a} = \frac{\ln 50}{\ln 2} = \log_2 50 = \log_2 2 + \log_2 25 = 1 + \log_2 25 > 1 + 4 = 5$, D 选项正确.

4. 已知 $3^x = 12$, $\log_3 \frac{9}{4} = y$, 则 $x+y =$ ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】 B**【详解】** 由 $3^x = 12$, 得 $x = \log_3 12$, 而 $y = \log_3 \frac{9}{4}$,

则 $x+y = \log_3 12 + \log_3 \frac{9}{4} = \log_3 \left(12 \times \frac{9}{4} \right) = \log_3 27 = 3$.

5. 式子 $e^{\ln 3} + \log_{\sqrt{5}} 25 + (0.125)^{-\frac{2}{3}}$ 的值为 ()

A. $\frac{29}{4}$

B. 10

C. 11

D. 12

【答案】 C**【详解】** $e^{\ln 3} = 3$,

$\log_{\sqrt{5}} 25 = \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} 5^2 = 4 \log_5 5 = 4$,

$(0.125)^{-\frac{2}{3}} = (2^{-3})^{-\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$,

所以 $e^{\ln 3} + \log_{\sqrt{5}} 25 + (0.125)^{-\frac{2}{3}} = 3 + 4 + 4 = 11$.

6. 若 $4^a = 9$, $3^b = 4$, 则 $a + \frac{1}{b} =$ ()

A. $\frac{3}{2} \log_2 3$

B. $\frac{3}{2} \log_3 2$

C. $\frac{2}{3} \log_2 3$

D. $\frac{2}{3} \log_3 2$

【答案】 A**【分析】** 根据指数与对数的互化及对数的运算性质求解即可.**【详解】** 由 $4^a = 9$ 得, $\log_4 4^a = \log_4 9$, 即 $a = \log_4 9$.

由 $3^b = 4$ 得, $\log_4 3^b = \log_4 4$, 即 $b \log_4 3 = 1$, 所以 $\frac{1}{b} = \log_4 3$.

所以 $a + \frac{1}{b} = \log_4 9 + \log_4 3 = \log_4 27 = \log_{2^2} 3^3 = \frac{3}{2} \log_2 3$.

7. 已知 $e^a = 2$, $\ln b = 3$, 则 $b^a =$ ()

A. 4

B. 8

C. 12

D. 16

【答案】B

【详解】由题意得 $a = \ln 2$, $b = e^3$, 所以 $b^a = (e^3)^{\ln 2} = e^{3 \ln 2} = e^{\ln 8} = 8$.

8. 已知 $x, y \in \mathbf{R}, x = \log_6 3, 2 = 6^y$, 则 ()

A. $y > x$

B. $xy < \frac{1}{4}$

C. $x + y > 1$

D. $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{2}$

【答案】B

【分析】结合题干和对数函数单调性可以判断 A; 根据 $x + y = 1$ 和基本不等式可以判断 B; 结合同底的对数运算可以判断 C; 结合选项 B 和基本不等式可以判断 D.

【详解】根据题意 $2 = 6^y$, 可得 $y = \log_6 2$, 且 $x = \log_6 3$.

选项 A: 由 $3 > 2$, 得 $\log_6 3 > \log_6 2$, 即 $x > y$, 故错误;

选项 C: $x + y = \log_6 3 + \log_6 2 = \log_6 (3 \times 2) = \log_6 6 = 1$, 不满足 $x + y > 1$, 故错误;

选项 B: $x > 0, y > 0$ 且 $x \neq y$, 由 $x + y = 1$ 和基本不等式可得 $xy < \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 即 $xy < \frac{1}{4}$, 故正确;

选项 D: $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy} = 1 + 2\sqrt{xy}$,

由 $xy < \frac{1}{4}$ 得 $\sqrt{xy} < \frac{1}{2}$, $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 < 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 2$, 即 $\sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{2}$, 故错误.

9. 已知 $2^a = 3^b = 18$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} =$ ()

A. 2

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. $\log_{18} 8$

【答案】C

【分析】利用指数对数互换, 解出 a, b 的值, 利用对数的运算法则计算即可.

【详解】已知 $2^a = 3^b = 18$, 则 $a = \log_2 18, b = \log_3 18$,

于是 $\frac{1}{a} = \frac{1}{\log_2 18} = \log_{18} 2, \frac{1}{b} = \log_{18} 3$.

所以 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \log_{18} 2 + 2\log_{18} 3 = \log_{18} 2 + \log_{18} 9$,

$= \log_{18} (2 \times 9) = \log_{18} 18 = 1$.

故选: C

10. $\log_2 3 \cdot \log_3 4 + 2^{\log_2 3} - \left(-\frac{4}{5}\right)^0 + \sqrt{(2-e)^2} = (\quad)$

A. e

B. e+1

C. e+2

D. e+3

【答案】C

【分析】利用指数、对数的运算法则计算各项,再合并求解.

【详解】 $\because \log_2 3 \cdot \log_3 4 = \log_2 3 \cdot \log_3 2^2 = 2\log_2 3 \cdot \log_3 2 = 2$, $2^{\log_2 3} = 3$, $\left(-\frac{4}{5}\right)^0 = 1$,

$$\sqrt{(2-e)^2} = |2-e| = e-2,$$

$$\therefore \log_2 3 \cdot \log_3 4 + 2^{\log_2 3} - \left(-\frac{4}{5}\right)^0 + \sqrt{(2-e)^2} = 2 + 3 - 1 + e - 2 = e + 2, \text{ 故 C 正确.}$$

故选: C.

11. 函数 $f(x) = x - \log_{\frac{1}{3}} x + 1$ 的零点所在的一个区间为 ()

A. $\left(0, \frac{1}{9}\right)$

B. $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{4}\right)$

C. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$

D. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

【答案】C

【分析】应用零点存在定理及对数函数值计算求解.

【详解】因为 $3^5 < 4^4$, 所以 $3^{\frac{5}{4}} < 4, \log_3 3^{\frac{5}{4}} = \frac{5}{4} < \log_3 4$, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} - \log_3 4 < 0$,

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{1}{3} > 0,$$

又因为 $f(x)$ 单调递增,

所以函数 $f(x) = x - \log_{\frac{1}{3}} x + 1$ 的零点所在的一个区间为 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$.

故选: C.

12. 计算: $(\log_{15} 3)^2 + \log_{15} 5 \log_{15} 45 = (\quad)$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】A

【分析】运用对数的运算性质，结合提公因式法进行求解即可.

$$\begin{aligned} & \text{【详解】 } (\log_{15} 3)^2 + \log_{15} 5 \log_{15} 45 \\ &= (\log_{15} 3)^2 + \log_{15} 5 \log_{15} (15 \times 3) \\ &= (\log_{15} 3)^2 + \log_{15} 5 (\log_{15} 15 + \log_{15} 3) \\ &= (\log_{15} 3)^2 + \log_{15} 5 (1 + \log_{15} 3) \\ &= (\log_{15} 3)^2 + \log_{15} 5 \log_{15} 3 + \log_{15} 5 \\ &= \log_{15} 3 (\log_{15} 3 + \log_{15} 5) + \log_{15} 5 \\ &= \log_{15} 3 \cdot \log_{15} (3 \times 5) + \log_{15} 5 \\ &= \log_{15} 3 + \log_{15} 5 \\ &= \log_{15} (3 \times 5) = 1, \end{aligned}$$

故选：A

13. 计算： $\lg \sqrt{5} + 2^{\log_2 3} + \log_2 \frac{1}{16} + \frac{\lg 2}{2} + \log_4 1 = (\quad)$

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{3}{2}$

【答案】C

【分析】由对数的运算代入计算，即可得到结果.

【详解】原式 $= \frac{1}{2}(\lg 5 + \lg 2) + 3 + \log_2 2^{-4} = \frac{1}{2} + 3 - 4 = -\frac{1}{2}$.

故选：C.

14. 式子 $e^{\ln 3} + \log_{\sqrt{5}} 25 + (0.125)^{-\frac{2}{3}}$ 的值为 ()

A. $\frac{29}{4}$ B. 10 C. 11 D. 12

【答案】C

【分析】利用指数与指数幂的运算及对数的运算即可求得答案.

【详解】 $e^{\ln 3} = 3$,

$$\log_{\sqrt{5}} 25 = \log_{\frac{1}{5^2}} 5^2 = 4 \log_5 5 = 4,$$

$$(0.125)^{-\frac{2}{3}} = (2^{-3})^{-\frac{2}{3}} = 2^2 = 4,$$

$$\text{所以 } e^{\ln 3} + \log_{\sqrt{5}} 25 + (0.125)^{-\frac{2}{3}} = 3 + 4 + 4 = 11.$$

故选：C.

15. 已知 $2^x = 12^y = 3$ ，则 $\frac{1}{y} - \frac{2}{x} =$ ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. 1

D. 6

【答案】C

【分析】先由指数和对数的关系得到 x 和 y 的值，再由对数运算化简可得结果.

【详解】由 $2^x = 12^y = 3$ ，可得 $x = \log_2 3$ ， $y = \log_{12} 3$ ，

$$\text{所以 } \frac{1}{y} - \frac{2}{x} = \frac{1}{\log_{12} 3} - \frac{2}{\log_2 3} = \log_3 12 - 2\log_3 2 = \log_3 12 - \log_3 4 = \log_3 3 = 1.$$

故选：C.

16. $\sqrt[6]{(3-\pi)^6} + \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} - 2^{\log_2 \frac{9}{4}} =$ ()

A. $\pi + \frac{3}{2}$

B. $\frac{15}{2} - \pi$

C. $3 - \pi$

D. $\pi - 3$

【答案】D

【分析】运用指数和对数的运算法则化简计算即可.

【详解】因为 $\sqrt[6]{(3-\pi)^6} = \pi - 3$ ， $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ ， $2^{\log_2 \frac{9}{4}} = \frac{9}{4}$ ，

$$\text{所以 } \sqrt[6]{(3-\pi)^6} + \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} - 2^{\log_2 \frac{9}{4}} = (\pi - 3) + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = \pi - 3.$$

故选：D

17. 下列计算正确的是 ()

A. $(a^2)^3 = a^5$

B. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{12}}$

C. $(\lg 2)^2 + \lg 2 \times \lg 5 + \lg 5 = 1$

D. $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[4]{(-2)^4} - 7^{\log_7 2} = \frac{9}{4}$

【答案】C

【分析】由指数和对数的运算性质计算各个选项即可得出结论.

【详解】对于 A，由指数运算性质可得： $(a^2)^3 = a^{2 \times 3} = a^6$ ，故 A 错误；

对于 B, 由指数运算性质可得: $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{7}{12}}$, 故 B 错误;

对于 C, $(\lg 2)^2 + \lg 2 \times \lg 5 + \lg 5 = \lg 2(\lg 2 + \lg 5) + \lg 5 = 1$, 故 C 正确;

对于 D, 原式 $= \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3 \times 2}{3}} + \sqrt[4]{2^4} - 2 = \frac{4}{9} + 2 - 2 = \frac{4}{9}$, 故 D 错误.

故选: C.

二、填空题

18. 若 $x > 0$, $y > 0$, $x + \frac{1}{y} = 1$, 则 $\frac{1}{x} + y + 3xy$ 的最小值为_____.

【答案】6

【分析】由基本不等式乘 1 法即可求解.

【详解】 $x > 0$, $y > 0$, $x + \frac{1}{y} = 1$,

$$\text{则 } \frac{1}{x} + y + 3xy = \left(\frac{1}{x} + y\right) \left(x + \frac{1}{y}\right) + 3xy = \frac{1}{xy} + 4xy + 2 \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy} \times 4xy} + 2 = 6,$$

当且仅当 $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{3}{2}$ 时取到等号.

即 $\frac{1}{x} + y + 3xy$ 的最小值为 6,

故答案为: 6

19. 已知正实数 x, y 满足 $x + y = 2$, 则 $\frac{y}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为_____.

【答案】 $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$

【分析】利用基本不等式求解即可.

【详解】 $\frac{y}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y}{x} + \frac{x+y}{2y} = \frac{y}{x} + \frac{x}{2y} + \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{y}{x} \times \frac{x}{2y}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2},$

当且仅当 $\frac{y}{x} = \frac{x}{2y}$ 且 $x + y = 2$, 即 $x = 4 - 2\sqrt{2}$, $y = 2\sqrt{2} - 2$ 时等号成立,

故答案为: $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$.

20. 已知 $x > y > 0$ 且 $4x + 3y = 1$, 则 $\frac{1}{2x-y} + \frac{2}{x+2y}$ 的最小值为_____.

【答案】9

【分析】通过换元，令 $a = 2x - y, b = x + 2y$ ，得 $a + 2b = 1$ ，将问题转化为求 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值.

再通过“1”的代换结合基本不等式即可得解.

【详解】由 $x > y > 0$ ，得 $2x - y > 0, x + 2y > 0$ ，令 $a = 2x - y, b = x + 2y$ ，则

$$a + 2b = 4x + 3y = 1,$$

$$\text{故 } \frac{1}{2x-y} + \frac{2}{x+2y} = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b}\right)(a + 2b) = 5 + \frac{2b}{a} + \frac{2a}{b} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{2b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} = 9,$$

$$\text{当且仅当 } \begin{cases} \frac{2b}{a} = \frac{2a}{b}, \\ a + 2b = 1, \end{cases} \text{ 即 } a = b = \frac{1}{3} \text{ 时等号成立,}$$

$$\text{也即 } \begin{cases} 2x - y = \frac{1}{3}, \\ x + 2y = \frac{1}{3}, \end{cases} \text{ 即 } x = \frac{1}{5}, y = \frac{1}{15} \text{ 时, 等号成立,}$$

$$\text{故 } \frac{1}{2x-y} + \frac{2}{x+2y} \text{ 的最小值为 } 9.$$

故答案为：9.